Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00601
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО_____________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $\frac{4,4}{5,8-5,3}$.

Ответ: ___________________________.

2 Найдите значение выражения $\frac{(0,1)^2}{10^{-3}}\cdot 10^2$.

Ответ: ___________________________.

3 Цена на электрический чайник была повышена на 15% и составила 3450 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Ответ: ___________________________.

4 Из формулы $P=I^2R$ найдите R, если $P=224$ Вт, а $I=4$ А.

Ответ: ___________________________.

Выполните только ОДНО из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1 Найдите значение выражения $\log_3 40,5+\log_3 6$.

Ответ: ___________________________.

5.2 Найдите значение выражения $22\sin 390°$.

Ответ: ___________________________.

6 На счёте Машиного мобильного телефона было 78 рублей, а после разговора с Леной осталось 12 рублей. Известно, что разговор длился целое число минут, а одна минута разговора стоит 1 рубль 50 копеек. Сколько минут длился разговор с Леной?

Ответ: ___________________________.

7 Найдите корень уравнения $\sqrt{13-x}=3$.

Ответ: ___________________________.

8 Человек отбрасывает тень в свете уличного фонаря. Рост человека равен 1,8 м, и он стоит на расстоянии 16 м от фонаря. При этом длина тени человека равна 9 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

Ответ: ___________________________.

9 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса человека	1) 460 т
Б) масса шариковой ручки	2) 80 кг
В) масса автомобиля	3) 1,3 т
Г) масса железнодорожного состава	4) 10 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10 В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: ___________________________.

11 В нескольких эстафетах, которые проводились в школе, команды показали следующие результаты.

Команда	I эстафета, баллы	II эстафета, баллы	III эстафета, баллы
«Непобедимые»	2	1	1
«Прорыв»	3	4	2
«Чемпионы»	1	2	4
«Тайфун»	4	3	3

При подведении итогов для каждой команды баллы по всем эстафетам суммируются. Побеждает команда, набравшая наибольшее количество баллов. Какое итоговое место заняла команда «Чемпионы»? В ответе запишите получившееся число.

Ответ: ___________________________.

12 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P (в рублях), показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

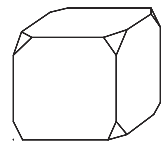
В таблице даны цены и показатели четырёх моделей мясорубок.

Модель мясорубки	Цена мясорубки (руб. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2500	2	1	1
Б	3400	1	2	3
В	4200	4	2	4
Г	3300	1	3	2

Найдите наивысший рейтинг мясорубки из представленных в таблице моделей.

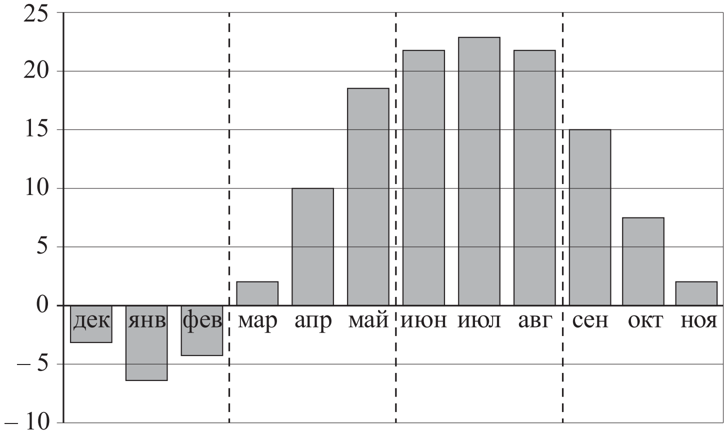
Ответ: ___________________________.

13 От деревянного кубика отпилили все его вершины (см. рисунок). Сколько рёбер у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?



Ответ: ___________________________.

14 На диаграмме изображена дневная среднемесячная температура воздуха в Москве по данным многолетних наблюдений. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику температуры.

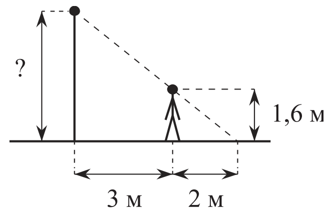
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) зима	1) Среднемесячная дневная температура росла более чем на 5 градусов каждый месяц периода.
Б) весна	2) Среднемесячная дневная температура за первый месяц периода составила 15° С.
В) лето	3) Среднемесячная дневная температура достигла максимума.
Г) осень	4) Дневная температура отрицательна в течение периода.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

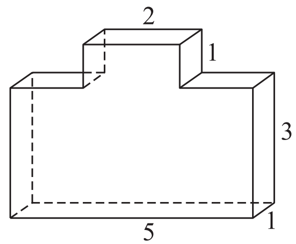
15



По данным рисунка найдите высоту фонаря (в метрах).

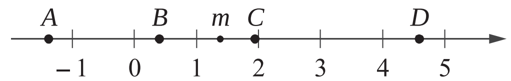
Ответ: ___________________________.

16 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

17 На координатной прямой отмечено число m и точки A, B, C и D.



Установите соответствие между указанными точками и числами в правом столбце, которые им соответствуют.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $6-m$
B	2) m^2
C	3) $m-1$
D	4) $-\frac{2}{m}$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер.

Ответ:

A	B	C	D

18 Хозяйка к празднику купила торт, ананас, сок и мясную нарезку. Торт стоил дороже ананаса, но дешевле мясной нарезки, сок стоил дешевле торта. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Ананас стоил дешевле мясной нарезки.
2) За сок заплатили больше, чем за мясную нарезку.
3) Мясная нарезка — самая дорогая из покупок.
4) Торт — самая дешёвая из покупок.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ___________________________.

19 Вычеркните в числе 82584703 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 18. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: ___________________________.

20 В корзине лежит 30 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Ответ: ___________________________.

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00602
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $\frac{2,1}{6,4-3,6}$.

Ответ: ___________________________.

2 Найдите значение выражения $\frac{(0,01)^2}{10^{-2}}\cdot 10^4$.

Ответ: ___________________________.

3 Цена на электрический чайник была повышена на 10 % и составила 2750 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Ответ: ___________________________.

4 Мощность электрического прибора (в Вт) равна произведению сопротивления прибора (в омах) на квадрат силы тока (в амперах). Найдите сопротивление прибора (в омах), если его мощность составляет 224 Вт, а сила тока равна 4 А.

Ответ: ___________________________.

Выполните только ОДНО из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1 Найдите значение выражения $\log_3 1,8+\log_3 5$.

Ответ: ___________________________.

5.2 Найдите значение выражения $15\sin 450^\circ$.

Ответ: ___________________________.

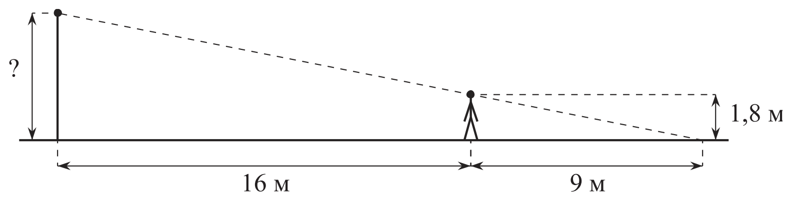
6 На счёте Машиного мобильного телефона было 42 рубля, а после разговора с Леной осталось 9 рублей. Известно, что разговор длился целое число минут, а одна минута разговора стоит 2 рубля 20 копеек. Сколько минут длился разговор с Леной?

Ответ: ___________________________.

7 Найдите корень уравнения $\sqrt{7-x}=3$.

Ответ: ___________________________.

8



По данным рисунка найдите высоту фонаря (в метрах).

Ответ: ___________________________.

9

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса таблетки лекарства	1) $3{,}3464\cdot10^{-27}$ кг
Б) масса Земли	2) 100 т
В) масса молекулы водорода	3) 500 мг
Г) масса взрослого кита	4) $5{,}9726\cdot10^{24}$ кг

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10

В среднем из 1500 садовых насосов, поступивших в продажу, 3 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: ___________________________.

11

В нескольких эстафетах, которые проводились в школе, команды показали следующие результаты.

Команда	**I эстафета, баллы**	**II эстафета, баллы**	**III эстафета, баллы**
«Непобедимые»	4	4	1
«Прорыв»	1	2	3
«Чемпионы»	2	1	2
«Тайфун»	3	3	4

При подведении итогов для каждой команды баллы по всем эстафетам суммируются. Побеждает команда, набравшая наибольшее количество баллов. Какое итоговое место заняла команда «Чемпионы»? В ответе запишите получившееся число.

Ответ: ___________________________.

12

Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P (в рублях), показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны цены и показатели четырёх моделей мясорубок.

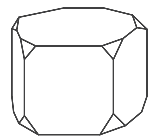
Модель мясорубки	**Цена мясорубки (руб. за шт.)**	**Функциональность**	**Качество**	**Дизайн**
А	4700	2	4	0
Б	2300	1	2	0
В	5400	2	4	2
Г	3700	3	1	2

Найдите наивысший рейтинг мясорубки из представленных в таблице моделей.

Ответ: ___________________________.

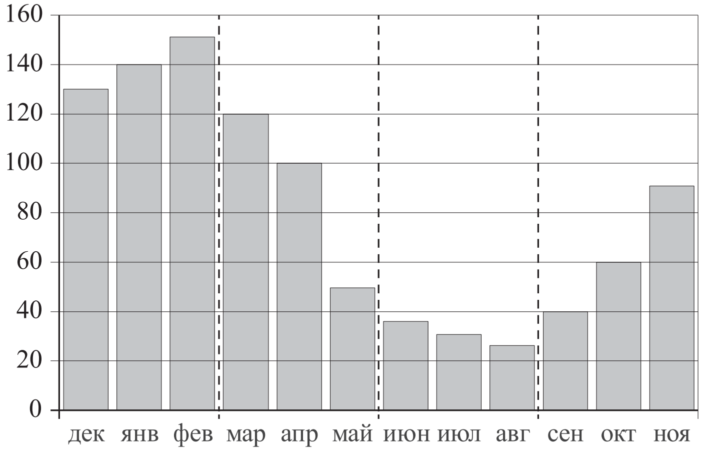
13

От деревянной правильной пятиугольной призмы одинаковым образом отпилили все её вершины (см. рисунок). Сколько вершин у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не обозначены)?



Ответ: ___________________________.

14 На диаграмме изображены объёмы месячных продаж обогревателей в магазине бытовой техники. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество проданных обогревателей.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику продаж обогревателей.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) зима	1) Ежемесячный объём продаж менее 40 штук.
Б) весна	2) Объём продаж достиг максимума.
В) лето	3) Объём продаж упал более чем на 40 штук за один месяц.
Г) осень	4) Наибольший рост объёма продаж.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

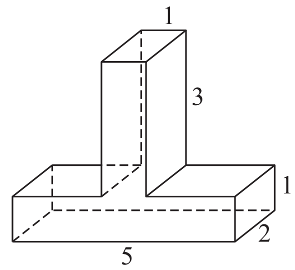
Ответ:

А	Б	В	Г

15 Человек отбрасывает тень в свете уличного фонаря. Рост человека равен 1,6 м, и он стоит на расстоянии 3 м от фонаря. При этом длина тени человека равна 2 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

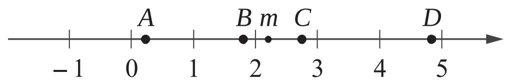
Ответ: ___________________________.

16 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

17 На координатной прямой отмечено число m и точки A, B, C и D.



Установите соответствие между указанными точками и числами в правом столбце, которые им соответствуют.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $4-m$
B	2) m^2
C	3) $m-2$
D	4) $\frac{6}{m}$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер.

Ответ:

A	B	C	D

18 При взвешивании животных в зоопарке выяснилось, что буйвол тяжелее льва, медведь легче буйвола, а рысь легче льва. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Рысь тяжелее буйвола.
2) Буйвол самый тяжёлый из всех этих животных.
3) Медведь тяжелее буйвола.
4) Рысь легче буйвола.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ___________________________.

19 Вычеркните в числе 24 665 521 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 22. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: ___________________________.

20 В корзине лежит 40 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 17 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 25 грибов хотя бы один груздь. Сколько груздей в корзине?

Ответ: ___________________________.

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00603
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $\frac{2,1}{6,6-2,4}$.

Ответ: ___________________________.

2 Найдите значение выражения $\frac{(0,01)^3}{10^{-5}}\cdot 10^4$.

Ответ: ___________________________.

3 Цена на электрический чайник была повышена на 50 % и составила 2250 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Ответ: ___________________________.

4 Из формулы $P=I^2R$ найдите R, если $P=28$ Вт, а сила тока $I=2$ А.

Ответ: ___________________________.

Выполните только ОДНО из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1 Найдите значение выражения $\log_7 686-\log_7 2$.

Ответ: ___________________________.

5.2 Найдите значение выражения $24\sqrt{2}\sin 405^\circ$.

Ответ: ___________________________.

6 На счёте Машиного мобильного телефона был 21 рубль, а после разговора с Леной осталось 75 копеек. Известно, что разговор длился целое число минут, а одна минута разговора стоит 2 рубля 25 копеек. Сколько минут длился разговор с Леной?

Ответ: ___________________________.

7 Найдите корень уравнения $\sqrt{13-2x}=5$.

Ответ: ___________________________.

8 Человек отбрасывает тень в свете уличного фонаря. Высота фонаря равна 6 м, и он находится на расстоянии 4,2 м от человека. При этом длина тени человека равна 1,8 м. Определите рост человека (в метрах).

Ответ: ___________________________.

9 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса куриного яйца	1) 2,5 мг
Б) масса детской коляски	2) 14 кг
В) масса взрослого бегемота	3) 50 г
Г) масса активного вещества в таблетке	4) 3 т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10 В среднем из 1500 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: ___________________________.

11 В нескольких эстафетах, которые проводились в школе, команды показали следующие результаты.

Команда	**I эстафета, баллы**	**II эстафета, баллы**	**III эстафета, баллы**
«Непобедимые»	1	1	2
«Прорыв»	3	4	3
«Чемпионы»	2	2	1
«Тайфун»	4	3	4

При подведении итогов для каждой команды баллы по всем эстафетам суммируются. Побеждает команда, набравшая наибольшее количество баллов. Какое итоговое место заняла команда «Прорыв»? В ответе запишите получившееся число.

Ответ: ___________________________.

12 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P (в рублях), показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = 4\left(2F + 2Q + D\right) - 0{,}01P.$$

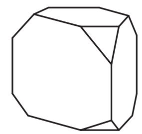
В таблице даны цены и показатели четырёх моделей мясорубок.

Модель мясорубки	**Цена мясорубки (руб. за шт.)**	**Функциональность**	**Качество**	**Дизайн**
А	3700	4	3	2
Б	5100	3	4	3
В	5200	4	3	4
Г	4800	4	1	4

Найдите наивысший рейтинг мясорубки из представленных в таблице моделей.

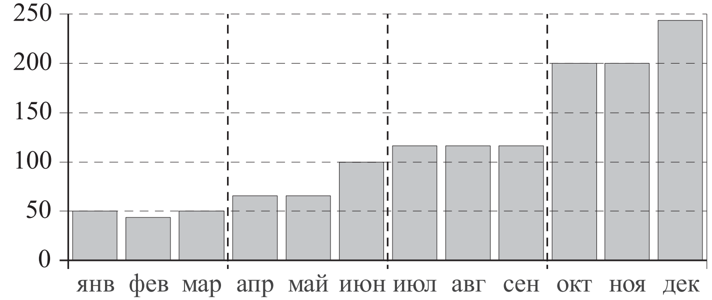
Ответ: ___________________________.

13 От деревянной правильной треугольной призмы отпилили все её вершины (см. рис.). Сколько рёбер у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не изображены)?



Ответ: ___________________________.

14 На диаграмме изображены запросы поисковой системы Яндекс по сочетанию слов «билеты на Олимпиаду» в 2013 году. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов (в тысячах штук).



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику изменения количества запросов.

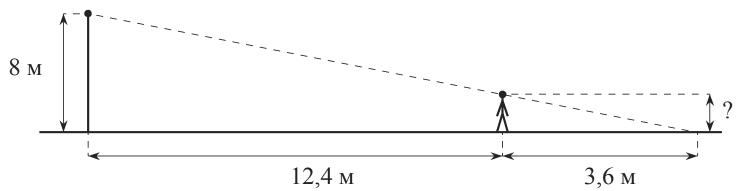
ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) январь–март	1) Количество запросов достигло максимума.
Б) апрель–июнь	2) Количество запросов за один из месяцев квартала равен 100 тысячам.
В) июль–сентябрь	3) Количества запросов за все месяцы периода совпадают.
Г) октябрь–декабрь	4) Число запросов за второй месяц квартала меньше, чем за первый.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

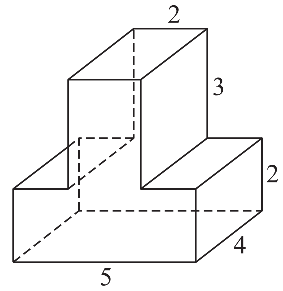
15



По данным рисунка найдите рост человека (в метрах).

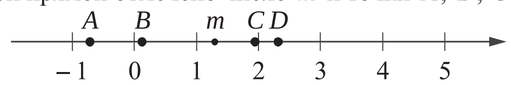
Ответ: ___________________________.

16 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

17 На координатной прямой отмечено число m и точки A, B, C и D.



Установите соответствие между указанными точками и числами в правом столбце, которые им соответствуют.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\sqrt{m}-1$
B	2) m^2
C	3) $m-2$
D	4) $\frac{3}{m}$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер.

Ответ:

A	B	C	D

18

На зимней Олимпиаде сборная России завоевала медалей больше, чем сборная Канады, сборная Канады — больше, чем сборная Германии, а сборная Норвегии — меньше, чем сборная Канады.
Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Из названных сборных команда Канады заняла второе место по числу медалей.
2) Среди названных сборных есть три, завоевавшие равное количество медалей.
3) Сборная Германии завоевала больше медалей, чем сборная России.
4) Сборная России завоевала больше медалей, чем каждая из остальных трёх сборных.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ___________________________.

19

Удалите в числе 30239545 три цифры так, чтобы получившееся пятизначное число делилось на 22. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: ___________________________.

20

В корзине лежит 25 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 11 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 16 грибов хотя бы один груздь. Сколько груздей в корзине?

Ответ: ___________________________.

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00604
(базовый уровень)

Выполнена: ФИО______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются в виде числа или последовательности цифр в поле ответа в тексте работы.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Найдите значение выражения $\frac{5,6}{1,7-1,6}$.

Ответ: ____________________________.

2 Найдите значение выражения $\frac{(0,1)^3}{10^{-2}}\cdot 10^2$.

Ответ: ____________________________.

3 Цена на электрический чайник была повышена на 25% и составила 1500 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Ответ: ____________________________.

4 Мощность электрического прибора (в Вт) равна произведению сопротивления прибора (в омах) на квадрат силы тока (в амперах). Найдите сопротивление прибора (в омах), если его мощность 28 Вт, а сила тока равна 2 А.

Ответ: ____________________________.

Выполните только ОДНО из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1 Найдите значение выражения $\log_7 588-\log_7 12$.

Ответ: ____________________________.

5.2 Найдите значение выражения $6\sqrt{3}\sin 420^\circ$.

Ответ: ____________________________.

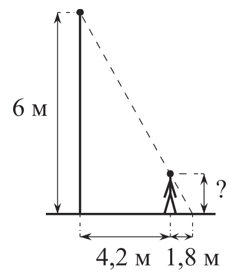
6 На счёте Машиного мобильного телефона было 68 рублей, а после разговора с Леной осталось 29 рублей. Известно, что разговор длился целое число минут, а одна минута разговора стоит 1 рубль 50 копеек. Сколько минут длился разговор с Леной?

Ответ: ____________________________.

7 Найдите корень уравнения $2^{5x-6}\cdot 2^{1-4x}=1$.

Ответ: ____________________________.

8



По данным рисунка найдите рост человека (в метрах).

Ответ: ___________________________.

9

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса кухонного холодильника	1) 3500 г
Б) масса трамвая	2) 15 г
В) масса новорождённого ребёнка	3) 17 т
Г) масса карандаша	4) 38 кг

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10

В среднем из 1500 садовых насосов, поступивших в продажу, 9 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: ___________________________.

11

В нескольких эстафетах, которые проводились в школе, команды показали следующие результаты.

Команда	I эстафета, баллы	II эстафета, баллы	III эстафета, баллы
«Непобедимые»	1	3	2
«Прорыв»	4	1	4
«Чемпионы»	3	4	3
«Тайфун»	2	2	1

При подведении итогов для каждой команды баллы по всем эстафетам суммируются. Побеждает команда, набравшая наибольшее количество баллов. Какое итоговое место заняла команда «Чемпионы»? В ответе запишите получившееся число.

Ответ: ___________________________.

12

Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P (в рублях), показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P.$$

В таблице даны цены и показатели четырёх моделей мясорубок.

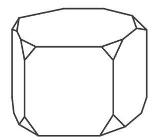
Модель мясорубки	Цена мясорубки (руб. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3600	2	4	0
Б	3900	2	0	1
В	4100	1	4	4
Г	3700	3	4	3

Найдите наивысший рейтинг мясорубки из представленных в таблице моделей.

Ответ: ___________________________.

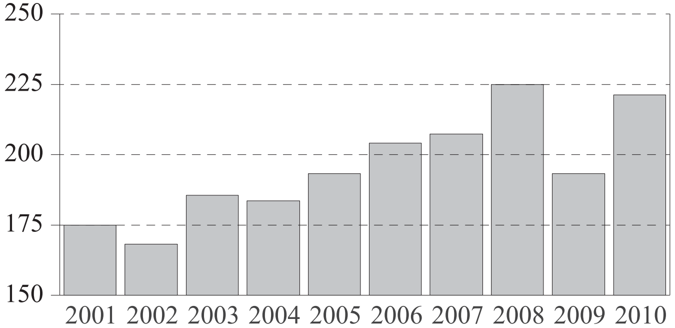
13

От деревянной правильной пятиугольной призмы одинаковым образом отпилили все её вершины (см. рисунок). Сколько рёбер у получившегося многогранника (невидимые рёбра на рисунке не обозначены)?



Ответ: ___________________________.

14 На диаграмме изображён годовой объём добычи угля открытым способом в России в период с 2001 по 2010 годы. По горизонтали указывается год, по вертикали — объём добычи угля в миллионах тонн.



Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику добычи угля.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

А) 2001–2003 гг.
Б) 2003–2005 гг.
В) 2005–2007 гг.
Г) 2007–2009 гг.

ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) Объём добычи в этот период рос с каждым годом.
2) Период содержит год, в который объём добычи угля был минимальным.
3) В течение периода объёмы добычи сначала росли, а затем стали падать.
4) Годовой объём добычи составлял больше 175, но меньше 200 млн т.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

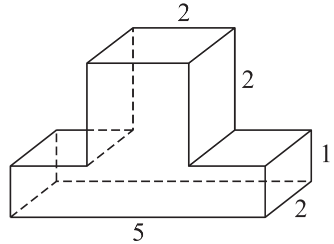
Ответ:

А	Б	В	Г

15 Человек отбрасывает тень в свете уличного фонаря. Высота фонаря равна 8 м, и он находится на расстоянии 12,4 м от человека. При этом длина тени человека равна 3,6 м. Определите рост человека (в метрах).

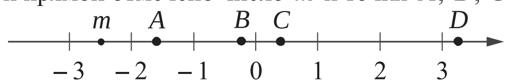
Ответ: ___________________________.

16 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

17 На координатной прямой отмечено число m и точки A, B, C и D.



Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца, которые им соответствуют.

ТОЧКИ

A
B
C
D

ЧИСЛА

1) $\frac{m}{10}$
2) m^2-3
3) $-\sqrt{-m}$
4) $-\frac{1}{m}$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер.

Ответ:

A	B	C	D

18 Виктор старше Дениса, но младше Егора. Андрей не старше Виктора. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Егор самый старший из указанных четырёх человек.
2) Андрей и Егор одного возраста.
3) Виктор и Денис одного возраста.
4) Денис младше Егора.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ___________________________.

19 Вычеркните в числе 86 957 205 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 60. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: ___________________________.

20 В корзине лежит 45 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 23 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 24 грибов хотя бы один груздь. Сколько груздей в корзине?

Ответ: ___________________________.

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00609
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 15 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1−8 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 9−15 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1−8 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В сборнике билетов по географии всего 40 билетов, в 18 из них встречается вопрос по теме «Страны Европы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Страны Европы».

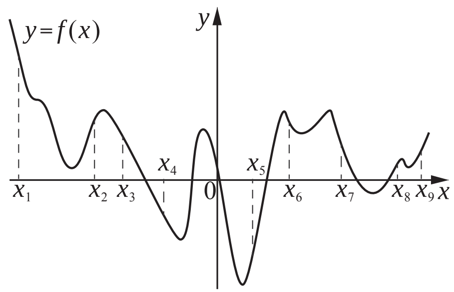
Ответ: ___________________________.

2 В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами равен $30°$. Боковая сторона равна 54. Найдите высоту, проведённую из вершины при основании к боковой стороне.

Ответ: ___________________________.

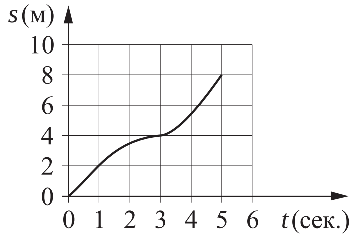
Выполните только ОДНО из заданий: 3.1 или 3.2.

3.1 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



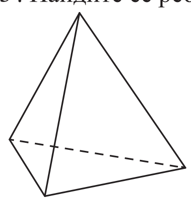
Ответ: ___________________________.

3.2 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ: ___________________________.

4 В правильной треугольной пирамиде все рёбра равны между собой, а площадь её поверхности составляет $9\sqrt{3}$. Найдите её ребро.



Ответ: ___________________________.

Выполните только ОДНО из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1 Найдите значение выражения $5\sqrt{2}\sin\frac{15\pi}{8}\cdot\cos\frac{15\pi}{8}$.

Ответ: ___________________________.

5.2 Найдите значение выражения $4^{\log_{16}81}$.

Ответ: ___________________________.

6 Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой линии горизонта равно $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ (км) — радиус Земли. Найдите h (км), если $l=32$ км.

Ответ: ___________________________.

7 Два велосипедиста одновременно отправились в 77-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость второго и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

8 Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{-41+16x-x^2}$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 9–15 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (9, 10 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

9 а) Решите уравнение $2\sin(\pi+x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

10 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.
а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.
б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Выполните только ОДНО из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2-x-1\right)\le 0$.

11.2 Решите неравенство $\frac{-2x^2+23x-11}{x+2x^2-1}\ge\frac{x+1}{x-1}$.

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:4$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM \cdot CM < BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

13 В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

14 Найдите все значения $a \in [-1; 0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-3 < x < -2{,}5$ является решением уравнения $|x-3a| + |x-5a| = -2a$.

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00610
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 15 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–8 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 9–15 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

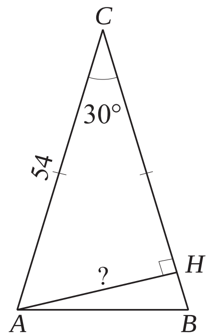
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1−8 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В сборнике билетов по философии всего 25 билетов, в 8 из них встречается вопрос по теме «Пифагор». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по теме «Пифагор».

Ответ: ___________________________.

2

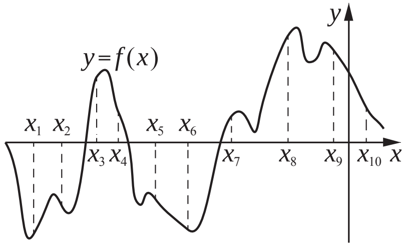


Дано: $\angle C = 30°$; $AC = BC = 54$.
Найти: AH.

Ответ: ___________________________.

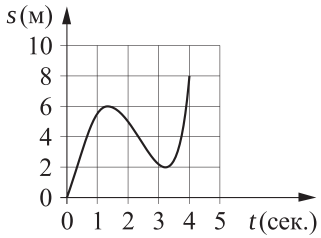
Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 3.1 или 3.2.

3.1 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены десять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



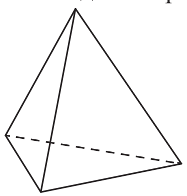
Ответ: ___________________________.

3.2 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ: ___________________________.

4 В правильной треугольной пирамиде все рёбра равны между собой, а площадь её поверхности составляет $16\sqrt{3}$. Найдите её ребро.



Ответ: ___________________________.

Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1 Найдите значение выражения $10\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: ___________________________.

5.2 Найдите значение выражения $5^{3+\log_5 2}$.

Ответ: ___________________________.

6 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется как квадратный корень из удвоенного произведения радиуса Земли на высоту, на которой находится наблюдатель. Радиус Земли равен 6400 км. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 32 километра? Ответ выразите в километрах.

Ответ: ___________________________.

7 Два велосипедиста одновременно отправились в 72-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 1 км/ч большей, чем скорость второго и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

8 Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2+28x+218}$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 9–15 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (9, 10 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

9

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-x)=\sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

10

В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Выполните только ОДНО из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1

Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(3x^2+7x+1\right)\geq 0$.

11.2

Решите неравенство $\frac{-2x^2+19x+10}{5x+2x^2+2}\geq 1+\frac{2}{x}$.

12

Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:9$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM\cdot CM<BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

13

В июле планируется взять кредит на сумму 40 040 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

14

Найдите все значения $a\in[-1;0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-5<x<-3$ является решением уравнения $|x-5a|+|x-6a|=-a$.

15

Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n\geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k-2$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5=9$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00611
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 15 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1−8 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 9−15 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1−8 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрные с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтые с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

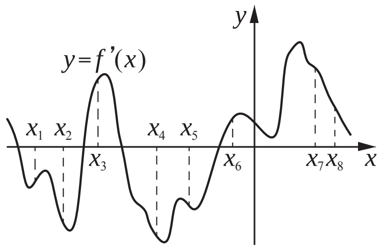
Ответ: ___________________________.

2 Сторона равностороннего треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите высоту этого треугольника.

Ответ: ___________________________.

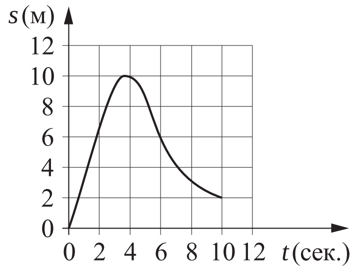
Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 3.1 или 3.2.

3.1 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



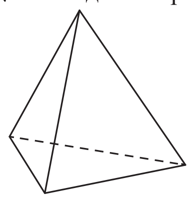
Ответ: ___________________________.

3.2 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ: ___________________________.

4 В правильной треугольной пирамиде все рёбра равны между собой, а площадь её поверхности составляет $25\sqrt{3}$. Найдите её ребро.



Ответ: ___________________________.

Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1 Найдите значение выражения $\dfrac{18}{\sin\left(-\dfrac{26\pi}{3}\right)\cdot\cos\dfrac{35\pi}{6}}$.

Ответ: ___________________________.

5.2 Найдите значение выражения $81^{\log_9 6}$.

Ответ: ___________________________.

6 Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой линии горизонта равно $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ (км) — радиус Земли. Найдите h (км), если $l=16$ км.

Ответ: ___________________________.

7 От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 306 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

8 Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2+16x+113}$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 9–15 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (9, 10 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

9 а) Решите уравнение $2\sin(\pi+x)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

10 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Выполните только ОДНО из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2-x-1\right)\le 0$.

11.2 Решите неравенство $\dfrac{-2x^2+23x-11}{x+2x^2-1}\ge\dfrac{x+1}{x-1}$.

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:4$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM\cdot CM<BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

13 В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

14 Найдите все значения $a\in[-1;0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-3<x<-2{,}5$ является решением уравнения $|x-3a|+|x-5a|=-2a$.

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n\ge 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\le n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k-1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5=4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00612
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 15 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1−8 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 9−15 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

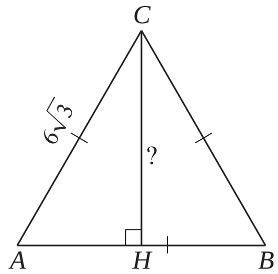
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1−8 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Фабрика выпускает сумки. В среднем 3 сумки из 50 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Ответ: ___________________________.

2

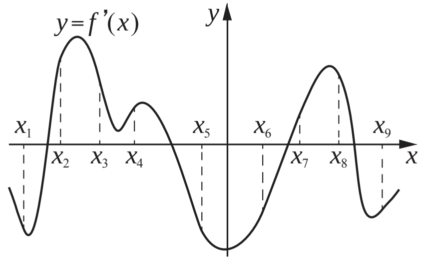


Дано: $AB = BC = AC = 6\sqrt{3}$.
Найти: CH.

Ответ: ___________________________.

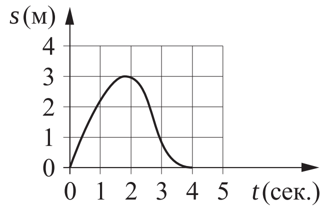
Выполните только ОДНО из заданий: 3.1 или 3.2.

3.1 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



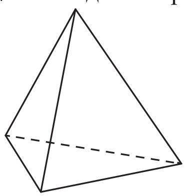
Ответ: ___________________________.

3.2 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



Ответ: ____________________________.

4 В правильной треугольной пирамиде все рёбра равны между собой, а площадь её поверхности составляет $36\sqrt{3}$. Найдите её ребро.



Ответ: ____________________________.

Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 5.1 или 5.2.

5.1 Найдите значение выражения $29\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ____________________________.

5.2 Найдите значение выражения $19\cdot 12^{\log_{12}16}$.

Ответ: ____________________________.

6 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется как квадратный корень из удвоенного произведения радиуса Земли на высоту, на которой находится наблюдатель. Радиус Земли равен 6400 км. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 16 километров? Ответ выразите в километрах.

Ответ: ____________________________.

7 От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 209 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним, со скоростью на 8 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

8 Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{-72+18x-x^2}$.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

9 а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-x)=\sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

10 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.
а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.
б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(3x^2+7x+1\right)\geq 0$.

11.2 Решите неравенство $\dfrac{-2x^2+19x+10}{5x+2x^2+2}\geq 1+\dfrac{2}{x}$.

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:9$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM\cdot CM < BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

13 В июле планируется взять кредит на сумму 40 040 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

14 Найдите все значения $a\in[-1;0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-5<x<-3$ является решением уравнения $|x-5a|+|x-6a|=-a$.

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n\geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k-2$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5=9$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00613
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 15 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1−8 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 9−15 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1−8 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Из множества натуральных чисел от 73 до 97 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

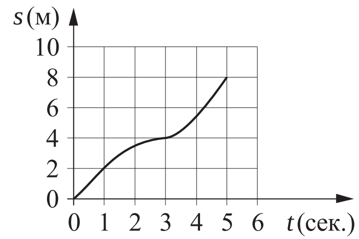
Ответ: ___________________________.

2 В равнобедренном треугольнике внешний угол, смежный с углом при основании, равен $123°$. Найдите угол треугольника, лежащий напротив основания. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

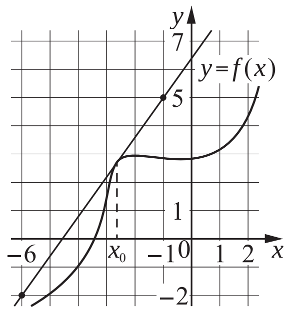
Выполните только ОДНО из заданий: 3.1 или 3.2.

3.1 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



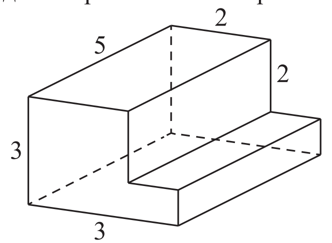
Ответ: ___________________________.

3.2 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

4 На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите площадь поверхности многогранника.



Ответ: ___________________________.

5 Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

6 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 10 мг.

Ответ: ___________________________.

7 Смешали некоторое количество 18-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 20-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ___________________________.

8 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{8 + \cos^2 x}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 9–15 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (9, 10 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

9 а) Решите уравнение $2\sin(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

10 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Выполните только ОДНО из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2 - x - 1\right) \le 0$.

11.2 Решите неравенство $\frac{-2x^2 + 23x - 11}{x + 2x^2 - 1} \ge \frac{x+1}{x-1}$.

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:4$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM \cdot CM < BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

13 В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

14 Найдите все значения $a \in [-1; 0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-3 < x < -2{,}5$ является решением уравнения $|x-3a|+|x-5a|=-2a$.

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00614
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 15 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–8 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 9–15 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

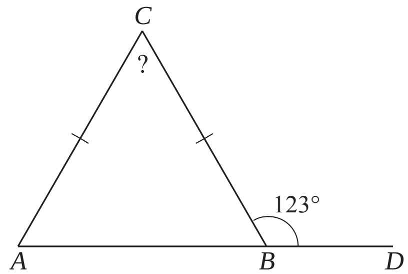
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1−8 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет нечётной и больше, чем 4?

Ответ: ___________________________.

2

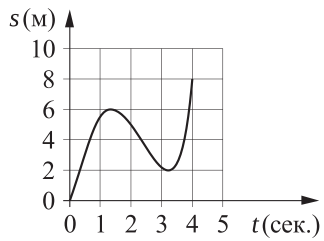


Дано: $AC = BC$; $\angle CBD = 123^\circ$.
Найти: $\angle C$ (в градусах).

Ответ: ___________________________.

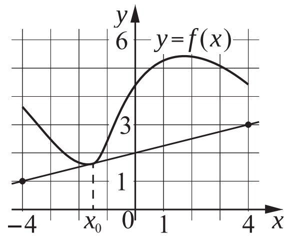
Выполните только ОДНО из заданий: 3.1 или 3.2.

3.1 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



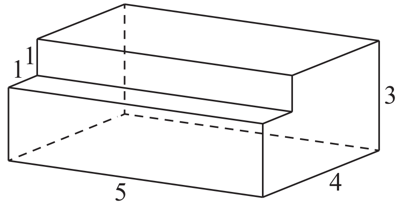
Ответ: ___________________________.

3.2 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

4 На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите площадь поверхности многогранника.



Ответ: ___________________________.

5 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Ответ: ___________________________.

6 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 16 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 2 мг.

Ответ: ___________________________.

7 Смешали 3 литра 20-процентного водного раствора некоторого вещества с 7 литрами 10-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ___________________________.

8 Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{9 + \cos^2 x}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 9–15 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (9, 10 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

9 а) Решите уравнение $2\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos(2\pi - x) = \sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

10 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.
а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.
б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(3x^2 + 7x + 1\right) \geq 0$.

11.2 Решите неравенство $\frac{-2x^2 + 19x + 10}{5x + 2x^2 + 2} \geq 1 + \frac{2}{x}$.

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:9$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM \cdot CM < BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

13 В июле планируется взять кредит на сумму 40 040 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

14 Найдите все значения $a \in [-1;0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-5 < x < -3$ является решением уравнения $|x-5a|+|x-6a|=-a$.

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 2$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5 = 9$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00615
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс ______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 15 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1−8 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 9−15 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1−8 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Дима, Марат, Петя, Надя и Света бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

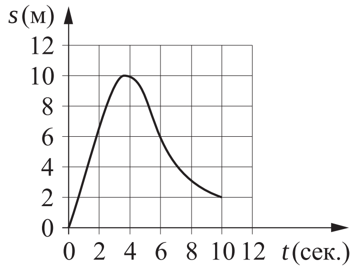
Ответ: ___________________________.

2 В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами равен $118°$. Найдите угол при основании треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

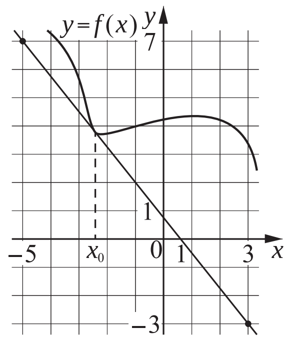
Выполните только ОДНО из заданий: 3.1 или 3.2.

3.1 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



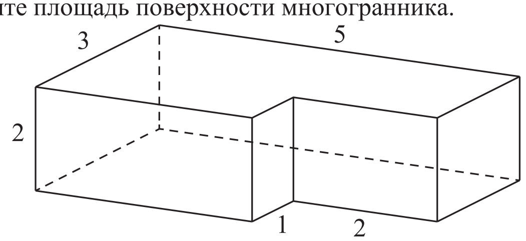
Ответ: ___________________________.

3.2 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

4 На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите площадь поверхности многогранника.



Ответ: ___________________________.

5 Найдите $4\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}5$.

Ответ: ___________________________.

6 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 80 мг. Период его полураспада составляет 15 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 10 мг.

Ответ: ___________________________.

7 Смешали некоторое количество 21-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 13-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ___________________________.

8 Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{16 + \sin^2 x}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 9–15 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (9, 10 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

9 а) Решите уравнение $2\sin(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

10 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.
а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.
б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Выполните только ОДНО из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2 - x - 1\right) \le 0$.

11.2 Решите неравенство $\frac{-2x^2 + 23x - 11}{x + 2x^2 - 1} \ge \frac{x+1}{x-1}$.

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:4$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM \cdot CM < BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

13 В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

14 Найдите все значения $a \in [-1; 0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-3 < x < -2{,}5$ является решением уравнения $|x-3a|+|x-5a|=-2a$.

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Диагностическая работа по подготовке к ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ
10 класс

20 мая 2015 года
Вариант МА00616
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс ______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 15 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1−8 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 9−15 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

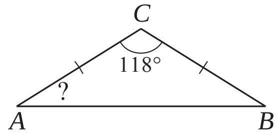
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1−8 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 9. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

2

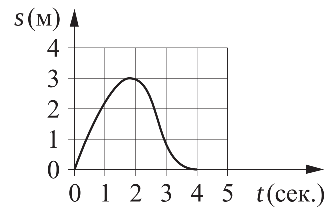


Дано: $\angle C = 118°$; $AC = BC$.
Найти: $\angle A$ (в градусах).

Ответ: ___________________________.

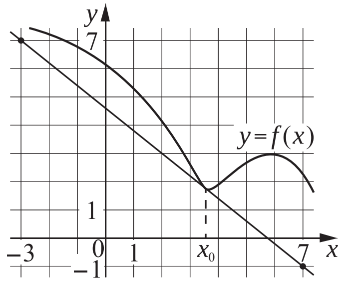
Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 3.1 или 3.2.

3.1 Материальная точка движется от начального до конечного положения. На рисунке изображён график её движения. На оси абсцисс откладывается время в секундах, на оси ординат — расстояние от начального положения точки (в метрах). Найдите среднюю скорость движения точки. Ответ дайте в метрах в секунду.



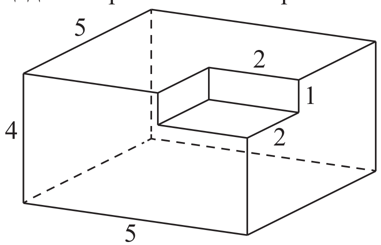
Ответ: ___________________________.

3.2 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

4 На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите площадь поверхности многогранника.



Ответ: ___________________________.

5 Найдите $36\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Ответ: ___________________________.

6 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 156 мг. Период его полураспада составляет 8 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 39 мг.

Ответ: ___________________________.

7 В сосуд, содержащий 4 литра 20-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 6 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ___________________________.

8 Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{24 + \sin^2 x}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 9–15 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (9, 10 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

9 а) Решите уравнение $2\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos(2\pi - x) = \sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

10 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(3x^2 + 7x + 1\right) \geq 0$.

11.2 Решите неравенство $\frac{-2x^2 + 19x + 10}{5x + 2x^2 + 2} \geq 1 + \frac{2}{x}$.

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:9$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM \cdot CM < BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

13 В июле планируется взять кредит на сумму 40 040 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

14 Найдите все значения $a \in [-1;0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-5 < x < -3$ является решением уравнения $|x-5a|+|x-6a|=-a$.

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 2$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5 = 9$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

9

а) Решите уравнение $2\sin(\pi + x)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

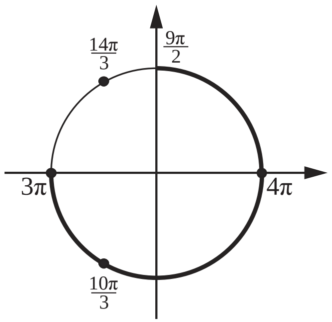
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$-2\sin x\cdot\cos x = \sin x; \quad \sin x(1 + 2\cos x) = 0.$$

Получаем $\sin x = 0$ или $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, откуда $x = \pi n$, $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[3\pi; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x = 3\pi$, $x = \dfrac{10\pi}{3}$ и $x = 4\pi$.

Ответ: а) πn, $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π, $\dfrac{10\pi}{3}$, 4π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

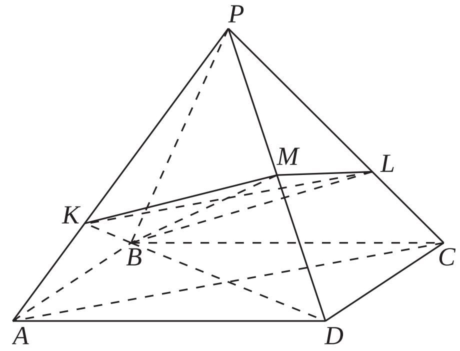
10

В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Решение.



а) Пусть M — середина PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP = BD$, но, так как $PB = PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD = 60°$, что и требовалось доказать.

б) Из доказанного следует, что $PA = 6\sqrt{2}$ и $BM = 3\sqrt{6}$ как высота равностороннего треугольника BPD. Применяя теорему косинусов в треугольнике APD, получаем $36 = 144(1 - \cos\angle APD)$, откуда $\cos\angle APD = \dfrac{3}{4}$. Пусть $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK = \dfrac{PM}{\cos\angle APD} = 4\sqrt{2}$. Аналогично находим $PL = 4\sqrt{2}$. Значит, $PK = PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK = 4\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM\cdot KL = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $12\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Выполните только ОДНО из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2-x-1\right)\le 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<(x+4)^2<1$; $-5<x<-4$ или $-4<x<-3$. Тогда

$$3x^2-x-1\ge 1;\ (3x+2)(x-1)\ge 0,$$

откуда $x\le -\frac{2}{3}$ или $x\ge 1$.

При $0<(x+4)^2<1$ получаем:

$$-5<x<-4 \text{ или } -4<x<-3.$$

Второй случай: $(x+4)^2>1$; $x<-5$ или $x>-3$. Тогда

$$\begin{cases}3x^2-x-1>0,\\ 3x^2-x-1\le 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)>0,\\ (3x+2)(x-1)\le 0,\end{cases}$$

откуда $-\frac{2}{3}\le x<\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ или $\frac{1+\sqrt{13}}{6}<x\le 1$.

Найденные решения удовлетворяют условию $(x+4)^2>1$.

Решение исходного неравенства:

$$-5<x<-4;\ -4<x<-3;\ -\frac{2}{3}\le x<\frac{1-\sqrt{13}}{6};\ \frac{1+\sqrt{13}}{6}<x\le 1.$$

Ответ: $(-5;-4)\cup(-4;-3)\cup\left[-\frac{2}{3};\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6};1\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

11.2 Решите неравенство $\frac{-2x^2+23x-11}{x+2x^2-1}\ge\frac{x+1}{x-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x^2-23x+11}{2x^2+x-1}\le 0;\quad \frac{x+1}{x-1}+\frac{(2x-1)(x-11)}{(x+1)(2x-1)}\le 0.$$

Тогда $\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-11}{x+1}\le 0,\\ x\ne\frac{1}{2},\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}\le 0,\\ x\ne\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решая неравенство методом интервалов, получаем $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-1<x<1,\\ 2\le x\le 3,\end{array}\right.\\ x\ne\frac{1}{2}.\end{cases}$

Ответ: $(-1;\,0{,}5)\cup(0{,}5;\,1)\cup[2;\,3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:4$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM\cdot CM<BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

Решение.

а) Площадь треугольника BMC меньше площади треугольника ABC, поскольку у них общая сторона BC, но высота, проведённая к этой стороне, у первого треугольника меньше. Пусть $\angle BMC=\angle BAC=\alpha$. Тогда

$$\frac{1}{2}BM\cdot MC\cdot\sin\alpha<\frac{1}{2}BA\cdot AC\cdot\sin\alpha,$$

откуда $BM\cdot CM<BA^2$.

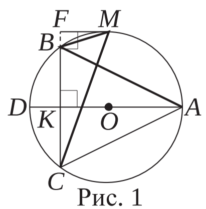


Рис. 1

б) Имеем

$$BO = 5;\ KD = 2;\ OK = OD - KD = 5 - 2 = 3;$$

$$BK = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4;\ BC = 8.$$

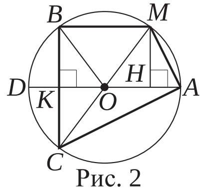


Рис. 2

Проведём из точки M перпендикуляр MH к отрезку AD (см. рис. 2). Отрезок KH равен высоте треугольника BMC, проведённой из точки M. Значит, площадь треугольника BCM равна

$$S_{BCM} = \frac{HK \cdot BC}{2} = \frac{HK \cdot 8}{2} = 24,$$

откуда

$$HK = 6;\ HO = HK - OK = 6 - 3 = 3;\ OK = OH.$$

Прямоугольные треугольники OKB и OHM равны по гипотенузе и катету, откуда $MH = BK = 4$, а значит, $KBMH$ — прямоугольник, $MB = KH = 6$.

Вписанный угол CBM прямой, значит, CM — диаметр окружности.

Медиана AO делит треугольник ACM на два треугольника равной площади,

$$AO = 5;\ S_{AOC} = S_{AOM} = \frac{AO \cdot MH}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Значит,

$$S_{ACBM} = S_{BCM} + S_{ACM} = S_{BCM} + 2S_{AOM} = 24 + 2 \cdot 10 = 44.$$

Ответ: б) 44.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

13 В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Псть сумма ежегодного платежа x рублей, а взятая в кредит сумма обозначена a рублей. Получаем уравнение

$$\left(\left(1{,}1a - x\right) \cdot 1{,}1 - x\right) \cdot 1{,}1 - x = 0,$$

откуда

$$1{,}1^3 a - \left(1{,}1^2 + 1{,}1 + 1\right) x = 0;\ 3x = \frac{3 \cdot 1{,}1^3 a}{1 + 1{,}1 + 1{,}1^2} = \frac{3{,}993a}{3{,}31}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что если бы долг выплачивали двумя равными платежами по y рублей, то общая сумма платежа равнялась бы

$$2y = \frac{2 \cdot 1{,}1^2 a}{1 + 1{,}1} = \frac{2{,}42a}{2{,}1}.$$

Подставляя $a = 69\,510$, получаем:

$$3x - 2y = \frac{3{,}993 \cdot 69\,510}{3{,}31} - \frac{2{,}42 \cdot 69\,510}{2{,}1} =$$

$$= 3{,}993 \cdot 21\,000 - 2{,}42 \cdot 33\,100 = 83\,853 - 80\,102 = 3751.$$

Ответ: 3751 руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

14 Найдите все значения $a \in [-1;\, 0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-3 < x < -2{,}5$ является решением уравнения $|x-3a|+|x-5a| = -2a$.

Решение.
Если $a=0$, то уравнение принимает вид $|x|+|x|=0$. Ни одно из чисел, удовлетворяющих условию $-3<x<-2{,}5$, не является решением уравнения, поэтому значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.
Пусть $a \in [-1;0)$. Тогда верно неравенство $3a-5a=-2a>0$. Поэтому решением неравенства является любое число из отрезка $[5a;\, 3a]$, поскольку длина этого отрезка равна $-2a$ и неравенству удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x=3a$ и $x=5a$ равна $-2a$.
Осталось выбрать те значения $a \in [-1;0)$, при каждом из которых отрезок $[5a;\, 3a]$ содержит хотя бы одно число, удовлетворяющее условию $-3<x<-2{,}5$. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{cases} 3a > -3, \\ 5a < -2{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -1, \\ a < -0{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $-1 < a < -0{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением граничных точек	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a, возможно, с включением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию системы неравенств (аналитически или графически). ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.
а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5 = 4$.
б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?
в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Решение.
а) Например, подходит последовательность 2, 4, 5, 5, 4.
б) При всех натуральных $k \leq n-1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$ равносильно равенству $b_{k+1} = b_k - 1$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \leq k \leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью -1.
Предположим, что некоторое натуральное число встретилось в последовательности a_k три раза. Значит, для некоторых индексов $p<q<r$ выполнены равенства $a_p = a_q = a_r$. Поэтому выполнены равенства

$$0 = a_q - a_p = b_p + b_{p+1} + \ldots + b_{q-1} = (q-p)b_p - \frac{(q-p)(q-p-1)}{2}$$

и, следовательно, равенство $b_p = \dfrac{q-p-1}{2}$. Аналогично получаем $b_p = \dfrac{r-p-1}{2}$. Приходим к противоречию, так как $q<r$.

в) Как доказано в решении пункта *б*, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \leq k \leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью -1. Предположим, что $n \geq 27$ и все числа a_k двузначные. Тогда либо $b_1 \geq 13$, либо $b_1 \leq 12$.
Если $b_1 \geq 13$, то при $1 \leq k \leq 13$ имеем $b_k \geq 14-k$ и

$$89 = 99-10 \geq a_{14} - a_1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_{13} \geq 13 + 12 + \ldots + 1 = 91.$$

Если $b_1 \leq 12$, то при $14 \leq k \leq 26$ имеем $b_k \leq 13-k$ (поскольку $b_{26} = b_1 - 25 \leq -13$) и

$$89 = 99-10 \geq a_{14} - a_{27} = -b_{14} - b_{15} - \ldots - b_{26} \geq 1 + 2 + \ldots + 13 = 91.$$

Полученное противоречие показывает, что $n \leq 26$.

Пример последовательности $a_k = 10 + 13(k-1) - \frac{k(k-1)}{2}$ при $1 \le k \le 26$ показывает, что n может равняться 26. Действительно, тогда последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k = 13 - k$ при $1 \le k \le 25$ образует арифметическую прогрессию с разностью -1. Значит, при всех натуральных $k \le n-2$ выполнены равенства $b_{k+1} = b_k - 1$ и $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$. Кроме того, при $1 \le k \le 26$ выполнены неравенства $10 = a_1 \le a_k \le a_{13} = 88$, и, следовательно, все члены последовательности a_k являются двузначными числами.

Ответ: а) Например, подходит последовательность 2, 4, 5, 5, 4; б) нет; в) при $n = 26$.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно выполнены все три пункта *а*, *б* и *в*	4
Верно выполнены два из трёх пунктов *а*, *б* и *в*	3
Верно выполнен только пункт *б* или пункт *в*	2
Верно выполнен только пункт *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

9

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-x)=\sqrt{3}\sin x$.

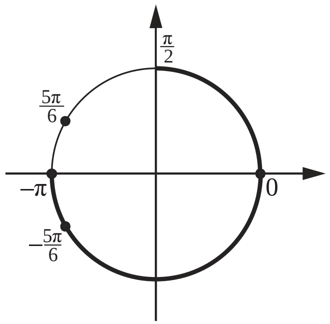
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$-2\sin x\cdot\cos x=\sqrt{3}\operatorname{sinx};\ \sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\right)=0.$$

Получаем $\sin x=0$ или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pi n$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x=-\pi$, $x=-\frac{5\pi}{6}$ и $x=0$.

Ответ: а) πn, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$, 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

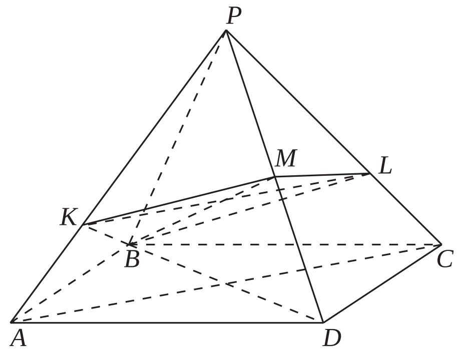
10

В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Решение.



а) Пусть M — середина PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP=BD$, но, так как $PB=PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD=60°$, что и требовалось доказать.

б) Из доказанного следует, что $PA=9\sqrt{2}$ и $BM=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ как высота равностороннего треугольника BPD. Применяя теорему косинусов в треугольнике APD, получаем $81=324(1-\cos\angle APD)$, откуда $\cos\angle APD=\frac{3}{4}$. Пусть $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK=\frac{PM}{\cos\angle APD}=6\sqrt{2}$. Аналогично находим $PL=6\sqrt{2}$. Значит, $PK=PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK=6\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM\cdot KL=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{6}}{2}\cdot 6\sqrt{2}=27\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $27\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Выполните только ОДНО из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(3x^2+7x+1\right)\ge 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<(x-3)^2<1$; $2<x<3$ или $3<x<4$. Тогда

$$\begin{cases}3x^2+7x+1>0,\\ 3x^2+7x+1\le 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)>0,\\ (3x+7)x\le 0;\end{cases}$$

откуда $-\dfrac{7}{3}\le x<-\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}$ или $-\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}<x\le 0$.

Найденные решения не удовлетворяют условию $0<(x-3)^2<1$.

Второй случай: $(x-3)^2>1$; $x<2$ или $x>4$. Тогда

$$3x^2+7x+1\ge 1;\ (3x+7)x\ge 0,$$

откуда $x\le -\dfrac{7}{3}$ или $x\ge 0$.

При $(x-3)^2>1$ получаем

$$x\le -\frac{7}{3},\ \text{или}\ 0\le x<2,\ \text{или}\ x>4.$$

Решение исходного неравенства:

$$x\le -\frac{7}{3};\ 0\le x<2;\ x>4.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{7}{3}\right]\cup[0;2)\cup(4;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

11.2 Решите неравенство $\dfrac{-2x^2+19x+10}{5x+2x^2+2}\ge 1+\dfrac{2}{x}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x+2}{x}+\frac{2x^2-19x-10}{2x^2+5x+2}\le 0;\quad \frac{x+2}{x}+\frac{(2x+1)(x-10)}{(x+2)(2x+1)}\le 0.$$

Тогда $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x-10}{x+2}\le 0,\\ x\ne -\dfrac{1}{2},\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x+2)}\le 0,\\ x\ne -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Решая неравенство методом интервалов, получаем $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-2<x<0,\\ 1\le x\le 2,\end{array}\right.\\ x\ne -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Ответ: $(-2;-0{,}5)\cup(-0{,}5;0)\cup[1;2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:9$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM\cdot CM<BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

Решение.

а) Площадь треугольника BMC меньше площади треугольника ABC, поскольку у них общая сторона BC, но высота, проведённая к этой стороне, у первого треугольника меньше. Пусть $\angle BMC=\angle BAC=\alpha$. Тогда

$$\frac{1}{2}BM\cdot MC\cdot\sin\alpha<\frac{1}{2}BA\cdot AC\cdot\sin\alpha,$$

откуда $BM\cdot CM<BA^2$.

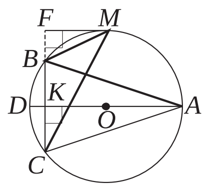


Рис. 1

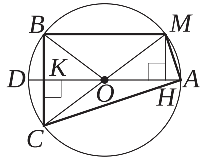


Рис. 2

б) Имеем

$$BO = 5;\ KD = 1;\ OK = OD - KD = 5 - 1 = 4;$$

$$BK = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3;\ \ BC = 6.$$

Проведём из точки M перпендикуляр MH к отрезку AD (см. рис. 2). Отрезок KH равен высоте треугольника BMC, проведённой из точки M. Значит, площадь треугольника BCM равна

$$S_{BCM} = \frac{HK \cdot BC}{2} = \frac{HK \cdot 6}{2} = 24,$$

откуда

$$HK = 8;\ \ HO = HK - OK = 8 - 4 = 4;\ \ OK = OH.$$

Прямоугольные треугольники OKB и OHM равны по гипотенузе и катету, откуда $MH = BK = 3$, а значит, $KBMH$ — прямоугольник, $MB = KH = 8$.
Вписанный угол CBM прямой, значит, CM — диаметр окружности.
Медиана AO делит треугольник ACM на два треугольника равной площади,

$$AO = 5;\ \ S_{AOC} = S_{AOM} = \frac{AO \cdot MH}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7{,}5.$$

Значит,

$$S_{ACBM} = S_{BCM} + S_{ACM} = S_{BCM} + 2S_{AOM} = 24 + 2 \cdot 7{,}5 = 39.$$

Ответ: б) 39.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

13 В июле планируется взять кредит на сумму 40 040 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.
Пусть сумма ежегодного платежа x рублей, а взятая в кредит сумма a рублей. Получаем уравнение

$$\left(\left(1{,}2a - x\right) \cdot 1{,}2 - x\right) \cdot 1{,}2 - x = 0,$$

откуда

$$1{,}2^3 a - \left(1{,}2^2 + 1{,}2 + 1\right)x = 0;\ \ 3x = \frac{3 \cdot 1{,}2^3 a}{1 + 1{,}2 + 1{,}2^2} = \frac{3 \cdot 1{,}728a}{3{,}64}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что если бы долг выплачивали двумя равными платежами по y рублей, то общая сумма платежа равнялась бы

$$2y = \frac{2 \cdot 1{,}2^2 a}{1 + 1{,}2} = \frac{1{,}44a}{1{,}1}.$$

Подставляя $a = 40\,040$, получаем:

$$3x - 2y = \frac{3 \cdot 1{,}728 \cdot 40\,040}{3{,}64} - \frac{1{,}44 \cdot 40\,040}{1{,}1} =$$

$$= 5{,}184 \cdot 11\,000 - 1{,}44 \cdot 36\,400 = 57\,024 - 52\,416 = 4608.$$

Ответ: 4608 руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

14 Найдите все значения $a \in [-1;0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-5 < x < -3$ является решением уравнения $|x-5a|+|x-6a|=-a$.

Решение.
Если $a=0$, то уравнение принимает вид $|x|+|x|=0$. Ни одно из чисел, удовлетворяющее условию $-5<x<-3$, не является решением уравнения, поэтому значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.
Пусть $a \in [-1;0)$. Тогда верно неравенство $5a-6a=-a>0$. Поэтому решением неравенства является любое число из отрезка $[6a;\,5a]$, поскольку длина этого отрезка равна $-a$ и неравенству удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x=5a$ и $x=6a$ равна $-a$.
Осталось выбрать те значения $a \in [-1;0)$, при каждом из которых отрезок $[6a;\,5a]$ содержит хотя бы одно число, удовлетворяющее условию $-5<x<-3$. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{cases} 5a > -5, \\ 6a < -3; \end{cases} \begin{cases} a > -1, \\ a < -0{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $-1 < a < -0{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением граничных точек	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a, возможно, с включением граничных точек.	2
Задача верно сведена к исследованию системы неравенств (аналитически или графически). ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 2$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5 = 9$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Решение.
а) Например, подходит последовательность 1, 6, 9, 10, 9.
б) При всех натуральных $k \leq n-1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 2$ равносильно равенству $b_{k+1} = b_k - 2$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \leq k \leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью -2.
Предположим, что некоторое натуральное число встретилось в последовательности a_k три раза. Значит, для некоторых индексов $p<q<r$ выполнены равенства $a_p = a_q = a_r$. Поэтому выполнены равенства

$$0 = a_q - a_p = b_p + b_{p+1} + \ldots + b_{q-1} = (q-p)b_p - (q-p)(q-p-1)$$

и, следовательно, равенство $b_p = q-p-1$. Аналогично получаем: $b_p = r-p-1$. Приходим к противоречию, так как $q<r$.
в) Как доказано в решении пункта *б*, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \leq k \leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью -2. Предположим, что $n \geq 20$ и все числа a_k двузначные. Тогда либо $b_1 \geq 18$, либо $b_1 \leq 17$.
Если $b_1 \geq 18$, то при $1 \leq k \leq 9$ имеем $b_k \geq 20-2k$ и

$$89 = 99-10 \geq a_{10} - a_1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_9 \geq 18 + 16 + \ldots + 2 = 90.$$

Если $b_1 \leq 17$, то при $10 \leq k \leq 19$ имеем $b_k \leq 19-2k$ и

$$89 = 99-10 \geq a_{10} - a_{20} = -b_{19} - b_{18} - \ldots - b_{10} \geq 1 + 3 + \ldots + 19 = 100.$$

Полученное противоречие показывает, что $n \leq 19$.
Пример последовательности

$$99-81,\ 99-64,\ 99-49,\ \ldots, 99-4,\ 99-1,\ 99,\ 99-1,\ \ldots, 99-81$$

(состоящей из 19 членов) показывает, что n может равняться 19.

Действительно, тогда последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \le k \le 18$ имеет вид $17, 15, 13, \ldots, 1, -1, \ldots, -15, -17$ и образует арифметическую прогрессию с разностью -2. Значит, при всех натуральных $k \le n-2$ выполнены равенства $b_{k+1} = b_k - 2$ и $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 2$. Кроме того, при $1 \le k \le 19$ выполнены неравенства $18 = a_1 \le a_k \le a_{10} = 99$, и, следовательно, все члены последовательности a_k являются двузначными числами.

Ответ: а) Например, подходит последовательность 1, 6, 9, 10, 9; б) нет; в) при $n = 19$.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно выполнены все три пункта *а*, *б* и *в*	4
Верно выполнены два из трёх пунктов *а*, *б* и *в*	3
Верно выполнен только пункт *б* или пункт *в*	2
Верно выполнен только пункт *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

9

а) Решите уравнение $2\sin(\pi+x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

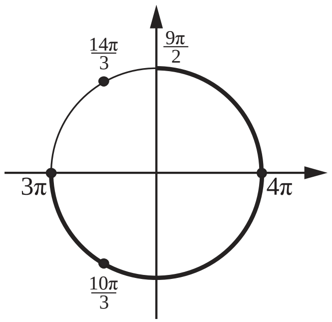
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$-2\sin x\cdot\cos x=\sin x;\qquad \sin x(1+2\cos x)=0.$$

Получаем $\sin x=0$ или $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=\pi n$, $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x=3\pi$, $x=\frac{10\pi}{3}$ и $x=4\pi$.

Ответ: а) πn, $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 3π, $\frac{10\pi}{3}$, 4π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

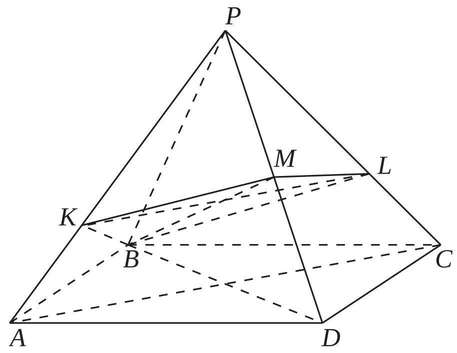
10

В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Решение.



а) Пусть M — середина PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP=BD$, но, так как $PB=PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD=60°$, что и требовалось доказать.

б) Из доказанного следует, что $PA=6\sqrt{2}$ и $BM=3\sqrt{6}$ как высота равностороннего треугольника BPD. Применяя теорему косинусов в треугольнике APD, получаем $36=144(1-\cos\angle APD)$, откуда $\cos\angle APD=\frac{3}{4}$. Пусть $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK=\frac{PM}{\cos\angle APD}=4\sqrt{2}$. Аналогично находим $PL=4\sqrt{2}$. Значит, $PK=PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK=4\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM\cdot KL=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{2}=12\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $12\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2-x-1\right)\le 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<(x+4)^2<1$; $-5<x<-4$ или $-4<x<-3$. Тогда

$$3x^2-x-1\ge 1;\ \ (3x+2)(x-1)\ge 0,$$

откуда $x\le -\frac{2}{3}$ или $x\ge 1$.

При $0<(x+4)^2<1$ получаем:

$$-5<x<-4 \text{ или } -4<x<-3.$$

Второй случай: $(x+4)^2>1$; $x<-5$ или $x>-3$. Тогда

$$\begin{cases}3x^2-x-1>0,\\3x^2-x-1\le 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)>0,\\(3x+2)(x-1)\le 0,\end{cases}$$

откуда $-\frac{2}{3}\le x<\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ или $\frac{1+\sqrt{13}}{6}<x\le 1$.

Найденные решения удовлетворяют условию $(x+4)^2>1$.

Решение исходного неравенства:

$$-5<x<-4;\ -4<x<-3;\ -\frac{2}{3}\le x<\frac{1-\sqrt{13}}{6};\ \frac{1+\sqrt{13}}{6}<x\le 1.$$

Ответ: $(-5;-4)\cup(-4;-3)\cup\left[-\frac{2}{3};\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6};1\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

11.2 Решите неравенство $\frac{-2x^2+23x-11}{x+2x^2-1}\ge\frac{x+1}{x-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x^2-23x+11}{2x^2+x-1}\le 0;\quad \frac{x+1}{x-1}+\frac{(2x-1)(x-11)}{(x+1)(2x-1)}\le 0.$$

Тогда $\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-11}{x+1}\le 0,\\x\ne\frac{1}{2},\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}\le 0,\\x\ne\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решая неравенство методом интервалов, получаем $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-1<x<1,\\2\le x\le 3,\end{array}\right.\\x\ne\frac{1}{2}.\end{cases}$

Ответ: $(-1;\,0{,}5)\cup(0{,}5;\,1)\cup[2;\,3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:4$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM\cdot CM<BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

Решение.

а) Площадь треугольника BMC меньше площади треугольника ABC, поскольку у них общая сторона BC, но высота, проведённая к этой стороне, у первого треугольника меньше. Пусть $\angle BMC=\angle BAC=\alpha$. Тогда

$$\frac{1}{2}BM\cdot MC\cdot\sin\alpha<\frac{1}{2}BA\cdot AC\cdot\sin\alpha,$$

откуда $BM\cdot CM<BA^2$.

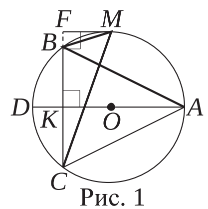


Рис. 1

б) Имеем

$$BO=5;\ KD=2;\ OK=OD-KD=5-2=3;$$

$$BK=\sqrt{OB^2-OK^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4;\ BC=8.$$

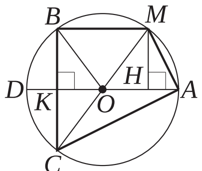


Рис. 2

Проведём из точки M перпендикуляр MH к отрезку AD (см. рис. 2). Отрезок KH равен высоте треугольника BMC, проведённой из точки M. Значит, площадь треугольника BCM равна

$$S_{BCM}=\frac{HK\cdot BC}{2}=\frac{HK\cdot 8}{2}=24,$$

откуда

$$HK=6;\ HO=HK-OK=6-3=3;\ OK=OH.$$

Прямоугольные треугольники OKB и OHM равны по гипотенузе и катету, откуда $MH=BK=4$, а значит, $KBMH$ — прямоугольник, $MB=KH=6$. Вписанный угол CBM прямой, значит, CM — диаметр окружности. Медиана AO делит треугольник ACM на два треугольника равной площади,

$$AO=5;\ S_{AOC}=S_{AOM}=\frac{AO\cdot MH}{2}=\frac{5\cdot 4}{2}=10.$$

Значит,

$$S_{ACBM}=S_{BCM}+S_{ACM}=S_{BCM}+2S_{AOM}=24+2\cdot 10=44.$$

Ответ: б) 44.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

13 В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Псть сумма ежегодного платежа x рублей, а взятая в кредит сумма обозначена a рублей. Получаем уравнение

$$\left(\left(1{,}1a-x\right)\cdot 1{,}1-x\right)\cdot 1{,}1-x=0,$$

откуда

$$1{,}1^3a-\left(1{,}1^2+1{,}1+1\right)x=0;\ 3x=\frac{3\cdot 1{,}1^3a}{1+1{,}1+1{,}1^2}=\frac{3{,}993a}{3{,}31}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что если бы долг выплачивали двумя равными платежами по y рублей, то общая сумма платежа равнялась бы

$$2y=\frac{2\cdot 1{,}1^2a}{1+1{,}1}=\frac{2{,}42a}{2{,}1}.$$

Подставляя $a=69\,510$, получаем:

$$3x-2y=\frac{3{,}993\cdot 69\,510}{3{,}31}-\frac{2{,}42\cdot 69\,510}{2{,}1}=$$

$$=3{,}993\cdot 21\,000-2{,}42\cdot 33\,100=83\,853-80\,102=3751.$$

Ответ: 3751 руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

14 Найдите все значения $a \in [-1;\,0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-3 < x < -2{,}5$ является решением уравнения $|x-3a| + |x-5a| = -2a$.

Решение.
Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $|x| + |x| = 0$. Ни одно из чисел, удовлетворяющих условию $-3 < x < -2{,}5$, не является решением уравнения, поэтому значение $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи.
Пусть $a \in [-1;0)$. Тогда верно неравенство $3a - 5a = -2a > 0$. Поэтому решением неравенства является любое число из отрезка $[5a;\,3a]$, поскольку длина этого отрезка равна $-2a$ и неравенству удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x = 3a$ и $x = 5a$ равна $-2a$.
Осталось выбрать те значения $a \in [-1;0)$, при каждом из которых отрезок $[5a;\,3a]$ содержит хотя бы одно число, удовлетворяющее условию $-3 < x < -2{,}5$. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{cases} 3a > -3, \\ 5a < -2{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -1, \\ a < -0{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $-1 < a < -0{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением граничных точек	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a, возможно, с включением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию системы неравенств (аналитически или графически). ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \ge 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \le n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Решение.
а) Например, подходит последовательность 2, 4, 5, 5, 4.
б) При всех натуральных $k \le n-1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$ равносильно равенству $b_{k+1} = b_k - 1$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \le k \le n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью -1.
Предположим, что некоторое натуральное число встретилось в последовательности a_k три раза. Значит, для некоторых индексов $p < q < r$ выполнены равенства $a_p = a_q = a_r$. Поэтому выполнены равенства

$$0 = a_q - a_p = b_p + b_{p+1} + \ldots + b_{q-1} = (q-p)b_p - \frac{(q-p)(q-p-1)}{2}$$

и, следовательно, равенство $b_p = \frac{q-p-1}{2}$. Аналогично получаем $b_p = \frac{r-p-1}{2}$. Приходим к противоречию, так как $q < r$.

в) Как доказано в решении пункта *б*, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \le k \le n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью -1. Предположим, что $n \ge 27$ и все числа a_k двузначные. Тогда либо $b_1 \ge 13$, либо $b_1 \le 12$.
Если $b_1 \ge 13$, то при $1 \le k \le 13$ имеем $b_k \ge 14 - k$ и

$$89 = 99 - 10 \ge a_{14} - a_1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_{13} \ge 13 + 12 + \ldots + 1 = 91.$$

Если $b_1 \le 12$, то при $14 \le k \le 26$ имеем $b_k \le 13 - k$ (поскольку $b_{26} = b_1 - 25 \le -13$) и

$$89 = 99 - 10 \ge a_{14} - a_{27} = -b_{14} - b_{15} - \ldots - b_{26} \ge 1 + 2 + \ldots + 13 = 91.$$

Полученное противоречие показывает, что $n \le 26$.

Пример последовательности $a_k = 10 + 13(k-1) - \frac{k(k-1)}{2}$ при $1 \le k \le 26$ показывает, что n может равняться 26. Действительно, тогда последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k = 13 - k$ при $1 \le k \le 25$ образует арифметическую прогрессию с разностью -1. Значит, при всех натуральных $k \le n-2$ выполнены равенства $b_{k+1} = b_k - 1$ и $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$. Кроме того, при $1 \le k \le 26$ выполнены неравенства $10 = a_1 \le a_k \le a_{13} = 88$, и, следовательно, все члены последовательности a_k являются двузначными числами.

Ответ: а) Например, подходит последовательность 2, 4, 5, 5, 4; б) нет; в) при $n = 26$.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно выполнены все три пункта *а*, *б* и *в*	4
Верно выполнены два из трёх пунктов *а*, *б* и *в*	3
Верно выполнен только пункт *б* или пункт *в*	2
Верно выполнен только пункт *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

9

а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-x)=\sqrt{3}\sin x$.

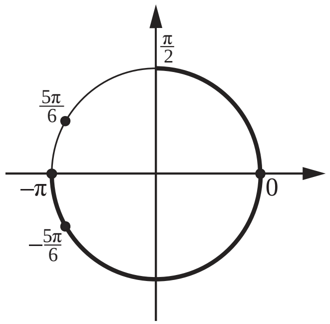
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$-2\sin x\cdot\cos x=\sqrt{3}\sin x;\ \sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\right)=0.$$

Получаем $\sin x=0$ или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pi n$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем $x=-\pi$, $x=-\frac{5\pi}{6}$ и $x=0$.

Ответ: а) πn, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$, 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

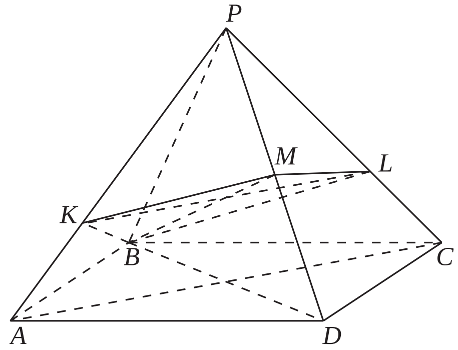
10

В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Решение.



а) Пусть M — середина PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP=BD$, но, так как $PB=PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD=60°$, что и требовалось доказать.

б) Из доказанного следует, что $PA=9\sqrt{2}$ и $BM=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ как высота равностороннего треугольника BPD. Применяя теорему косинусов в треугольнике APD, получаем $81=324(1-\cos\angle APD)$, откуда $\cos\angle APD=\frac{3}{4}$. Пусть $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK=\frac{PM}{\cos\angle APD}=6\sqrt{2}$. Аналогично находим $PL=6\sqrt{2}$. Значит, $PK=PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK=6\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM\cdot KL=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{6}}{2}\cdot 6\sqrt{2}=27\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $27\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Выполните только <u>ОДНО</u> из заданий: 11.1 или 11.2.

11.1 Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(3x^2+7x+1\right)\geq 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<(x-3)^2<1$; $2<x<3$ или $3<x<4$. Тогда

$$\begin{cases}3x^2+7x+1>0,\\3x^2+7x+1\leq 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)>0,\\(3x+7)x\leq 0;\end{cases}$$

откуда $-\dfrac{7}{3}\leq x<-\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}$ или $-\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}<x\leq 0$.

Найденные решения не удовлетворяют условию $0<(x-3)^2<1$.

Второй случай: $(x-3)^2>1$; $x<2$ или $x>4$. Тогда

$$3x^2+7x+1\geq 1;\ (3x+7)x\geq 0,$$

откуда $x\leq-\dfrac{7}{3}$ или $x\geq 0$.

При $(x-3)^2>1$ получаем

$$x\leq-\frac{7}{3},\ \text{или}\ 0\leq x<2,\ \text{или}\ x>4.$$

Решение исходного неравенства:

$$x\leq-\frac{7}{3};\ 0\leq x<2;\ x>4.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{7}{3}\right]\cup[0;2)\cup(4;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

11.2 Решите неравенство $\dfrac{-2x^2+19x+10}{5x+2x^2+2}\geq 1+\dfrac{2}{x}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x+2}{x}+\frac{2x^2-19x-10}{2x^2+5x+2}\leq 0;\quad \frac{x+2}{x}+\frac{(2x+1)(x-10)}{(x+2)(2x+1)}\leq 0.$$

Тогда $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x}+\dfrac{x-10}{x+2}\leq 0,\\x\neq-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x+2)}\leq 0,\\x\neq-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Решая неравенство методом интервалов, получаем $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-2<x<0,\\1\leq x\leq 2,\end{array}\right.\\x\neq-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Ответ: $(-2;-0{,}5)\cup(-0{,}5;0)\cup[1;2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

12 Дана окружность с центром в точке O и радиусом 5. Точка K делит диаметр AD в отношении $1:9$, считая от точки D. Через точку K проведена хорда BC перпендикулярно диаметру AD. На меньшей дуге AB окружности взята точка M.

а) Докажите, что $BM\cdot CM<BA^2$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ACBM$, если дополнительно известно, что площадь треугольника BCM равна 24.

Решение.

а) Площадь треугольника BMC меньше площади треугольника ABC, поскольку у них общая сторона BC, но высота, проведённая к этой стороне, у первого треугольника меньше. Пусть $\angle BMC=\angle BAC=\alpha$. Тогда

$$\frac{1}{2}BM\cdot MC\cdot\sin\alpha<\frac{1}{2}BA\cdot AC\cdot\sin\alpha,$$

откуда $BM\cdot CM<BA^2$.

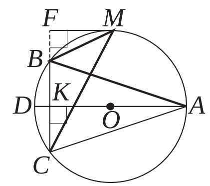


Рис. 1

б) Имеем

$$BO = 5;\ KD = 1;\ OK = OD - KD = 5 - 1 = 4;$$

$$BK = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3;\ BC = 6.$$

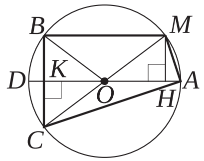


Рис. 2

Проведём из точки M перпендикуляр MH к отрезку AD (см. рис. 2). Отрезок KH равен высоте треугольника BMC, проведённой из точки M. Значит, площадь треугольника BCM равна

$$S_{BCM} = \frac{HK \cdot BC}{2} = \frac{HK \cdot 6}{2} = 24,$$

откуда

$$HK = 8;\ HO = HK - OK = 8 - 4 = 4;\ OK = OH.$$

Прямоугольные треугольники OKB и OHM равны по гипотенузе и катету, откуда $MH = BK = 3$, а значит, $KBMH$ — прямоугольник, $MB = KH = 8$.
Вписанный угол CBM прямой, значит, CM — диаметр окружности.
Медиана AO делит треугольник ACM на два треугольника равной площади,

$$AO = 5;\ S_{AOC} = S_{AOM} = \frac{AO \cdot MH}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7{,}5.$$

Значит,

$$S_{ACBM} = S_{BCM} + S_{ACM} = S_{BCM} + 2S_{AOM} = 24 + 2 \cdot 7{,}5 = 39.$$

Ответ: б) 39.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

13 В июле планируется взять кредит на сумму 40 040 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.
Пусть сумма ежегодного платежа x рублей, а взятая в кредит сумма a рублей. Получаем уравнение

$$\left(\left(1{,}2a - x\right) \cdot 1{,}2 - x\right) \cdot 1{,}2 - x = 0,$$

откуда

$$1{,}2^3 a - \left(1{,}2^2 + 1{,}2 + 1\right) x = 0;\ 3x = \frac{3 \cdot 1{,}2^3 a}{1 + 1{,}2 + 1{,}2^2} = \frac{3 \cdot 1{,}728a}{3{,}64}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что если бы долг выплачивали двумя равными платежами по y рублей, то общая сумма платежа равнялась бы

$$2y = \frac{2 \cdot 1{,}2^2 a}{1 + 1{,}2} = \frac{1{,}44a}{1{,}1}.$$

Подставляя $a = 40\,040$, получаем:

$$3x - 2y = \frac{3 \cdot 1{,}728 \cdot 40\,040}{3{,}64} - \frac{1{,}44 \cdot 40\,040}{1{,}1} =$$

$$= 5{,}184 \cdot 11\,000 - 1{,}44 \cdot 36\,400 = 57\,024 - 52\,416 = 4608.$$

Ответ: 4608 руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

14 Найдите все значения $a\in[-1;0]$, при каждом из которых хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условию $-5<x<-3$ является решением уравнения $|x-5a|+|x-6a|=-a$.

Решение.
Если $a=0$, то уравнение принимает вид $|x|+|x|=0$. Ни одно из чисел, удовлетворяющее условию $-5<x<-3$, не является решением уравнения, поэтому значение $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.
Пусть $a\in[-1;0)$. Тогда верно неравенство $5a-6a=-a>0$. Поэтому решением неравенства является любое число из отрезка $[6a;5a]$, поскольку длина этого отрезка равна $-a$ и неравенству удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x=5a$ и $x=6a$ равна $-a$.
Осталось выбрать те значения $a\in[-1;0)$, при каждом из которых отрезок $[6a;5a]$ содержит хотя бы одно число, удовлетворяющее условию $-5<x<-3$. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\begin{cases}5a>-5,\\6a<-3;\end{cases}\ \begin{cases}a>-1,\\a<-0{,}5.\end{cases}$$

Ответ: $-1<a<-0{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением граничных точек	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a, возможно, с включением граничных точек.	2
Задача верно сведена к исследованию системы неравенств (аналитически или графически). ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

15 Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n\geq 3$ необязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k-2$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$, в которой $a_5=9$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Решение.
а) Например, подходит последовательность 1, 6, 9, 10, 9.
б) При всех натуральных $k\leq n-1$ положим $b_k=a_{k+1}-a_k$. Тогда равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k-2$ равносильно равенству $b_{k+1}=b_k-2$. Следовательно, последовательность b_k при $1\leq k\leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью -2.

Предположим, что некоторое натуральное число встретилось в последовательности a_k три раза. Значит, для некоторых индексов $p<q<r$ выполнены равенства $a_p=a_q=a_r$. Поэтому выполнены равенства

$$0=a_q-a_p=b_p+b_{p+1}+\ldots+b_{q-1}=(q-p)b_p-(q-p)(q-p-1)$$

и, следовательно, равенство $b_p=q-p-1$. Аналогично получаем: $b_p=r-p-1$. Приходим к противоречию, так как $q<r$.

в) Как доказано в решении пункта *б*, последовательность $b_k=a_{k+1}-a_k$ при $1\leq k\leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью -2. Предположим, что $n\geq 20$ и все числа a_k двузначные. Тогда либо $b_1\geq 18$, либо $b_1\leq 17$.
Если $b_1\geq 18$, то при $1\leq k\leq 9$ имеем $b_k\geq 20-2k$ и

$$89=99-10\geq a_{10}-a_1=b_1+b_2+\ldots+b_9\geq 18+16+\ldots+2=90.$$

Если $b_1\leq 17$, то при $10\leq k\leq 19$ имеем $b_k\leq 19-2k$ и

$$89=99-10\geq a_{10}-a_{20}=-b_{19}-b_{18}-\ldots-b_{10}\geq 1+3+\ldots+19=100.$$

Полученное противоречие показывает, что $n\leq 19$.
Пример последовательности

$$99-81,\ 99-64,\ 99-49,\ \ldots, 99-4,\ 99-1,\ 99,\ 99-1,\ \ldots, 99-81$$

(состоящей из 19 членов) показывает, что n может равняться 19.

Действительно, тогда последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \le k \le 18$ имеет вид $17, 15, 13, \ldots, 1, -1, \ldots, -15, -17$ и образует арифметическую прогрессию с разностью -2. Значит, при всех натуральных $k \le n-2$ выполнены равенства $b_{k+1} = b_k - 2$ и $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 2$. Кроме того, при $1 \le k \le 19$ выполнены неравенства $18 = a_1 \le a_k \le a_{10} = 99$, и, следовательно, все члены последовательности a_k являются двузначными числами.

Ответ: а) Например, подходит последовательность 1, 6, 9, 10, 9; б) нет; в) при $n = 19$.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены все три пункта *а*, *б* и *в*	4
Верно выполнены два из трёх пунктов *а*, *б* и *в*	3
Верно выполнен только пункт *б* или пункт *в*	2
Верно выполнен только пункт *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4